Λύσεις Θεμάτων

Θέμα 1 Επειδή το A είναι κάτω φραγμένο,το $infA$ είναι αριθμός. Από ιδιότητα του $infA$: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \alpha_n \in A) : infA \leq \alpha_n < infA + \frac{1}{n}$ (1)
Για κάθε φυσικό n έχουμε ένα αντίστοιχο στοιχείο του A,οπότε έτσι δημιουργούμε μία ακολουθία $(\alpha_n) \subset A$ οι όροι της οποίας ικανοποιούν την (1).Έτσι από το Θέωρημα Ισοσυγκλινουσών συνεπάγεται ότι : $\alpha_n \to infA$.

Θέμα 2Έστω ότι η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Τότε το μη κενό σύνολο τιμών $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ είναι άνω φραγμένο,οπότε το $\ell = sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ είναι πραγματικός αριθμός. Θα δείξουμε ότι : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
Έστω $\epsilon > 0$.O $\ell - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} \implies \exists x_0 \in \mathbb{R}$: $\ell - \epsilon < f(x_0)$.Επειδή η f είναι αύξουσα για κάθε $x > x_0$ ισχύει : $f(x) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Επειδή ο ℓ είναι άνω φράγμα του $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$,ισχύει : $f(x) \leq \ell < \ell+\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα ισχύει : $\ell-\epsilon < f(x) < \ell+\epsilon \implies |f(x)-\ell| < \epsilon$,για κάθε $x > x_0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
2ος τρόπος :Έστω (α_n) αύξουσα ακολουθία με $\alpha_n \to +\infty$.Τότε η ακολουθία $f(\alpha_n)$ είναι αύξουσα καί άνω φραγμένη,άρα συγκλίνει στο ℓ.Αυτό ισχύει για κάθε αύξουσα και αποκλίνουσα ακολουθία,άρα από τον ακολουθιακό χαρακτηρισμό του ορίου συνάρτησης είναι : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Θέμα 3 Έστω ότι : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Σύμφωνα με τον ε-δ ορισμό αυτό σημαίνει ότι :$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D_f) : 0 < x < \delta \implies |f(x) - 0| < \epsilon$.
Όμως για κάθε $x > 0$ είναι : $f(x) > 0$,άρα έχουμε ότι : $f(x) < \epsilon \implies \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\epsilon}$.
Έτσι προκύπτει ότι ισχύει το εξής :$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D_f) : 0 < x < \delta \implies \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\epsilon}$,το οποίο είναι ισοδύναμο με το να γράψουμε : $lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει : $lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Ξανά με ε-δ ορισμό το τελευταίο σημαίνει ότι : $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D_f) : 0 < x < \delta \implies$
$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\epsilon} \iff f(x) < \epsilon$ (αφού $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$).
Άρα συνολικά :$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D_f) : 0 < x < \delta \implies f(x) < \epsilon$. Δηλαδή : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Θέμα 4(i) Έστω ότι : $x < 0$ και $\epsilon = -\frac{x}{2} > 0$.Τότε :
$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0) : |\alpha_n - x| < \epsilon = -\frac{x}{2}$. Τότε έχουμε :
$\alpha_n - x \leq |\alpha_n - x| < -\frac{x}{2} \implies \alpha_n < \frac{x}{2} < 0, \forall n \geq n_0$,άτοπο,αφού $\alpha_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
(ii)Έστω $\epsilon > 0$.Διακρίνουμε περιπτώσεις :
Περίπτωση 1η: $x = 0$ και έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε : $(\forall n \in \mathbb{N})$ με $n \geq n_0$:
$|\alpha_n - x| = |\alpha_n - 0| = |\alpha_n| = \alpha_n < \epsilon^2$.
Τότε για $n \geq n_0$ έχουμε : $\sqrt{\alpha_n} < \epsilon$,δηλαδή :$|\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{x}| = |\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{0}| = |\sqrt{\alpha_n}| = \sqrt{\alpha_n} < \epsilon$.Άρα : $lim\sqrt{\alpha_n} = \sqrt{x}$
Περίπτωση 2η:Έστω $x > 0$ και έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε : $(\forall n \geq n_0)$:$|\alpha_n - x| < \epsilon\sqrt{x}$
$(\forall n \geq n_0)$ είναι : $\epsilon\sqrt{x} > |\alpha_n - x| = |\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{x}||\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x}|$
$= |\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{x}|(\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x}) \implies |\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{x}| < \frac{\epsilon\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{x}} \leq \frac{\epsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \epsilon$. Άρα : $lim\sqrt{\alpha_n} = \sqrt{x}$ και σε αυτή την περίπτωση .

Θέμα 5Είναι : $\alpha_1 = -1$ και : $\alpha_2 = -2\sqrt{3} < \alpha_1$. Υποθέτουμε ότι : $\alpha_{n+1} < \alpha_n \implies -3\alpha_{n+1} > -3\alpha_n \implies \sqrt{-3\alpha_n} < \sqrt{-3\alpha_{n+1}} \implies$ $-2\sqrt{-3\alpha_n} > -2\sqrt{-3\alpha_{n+1}} \implies \alpha_{n+1} > \alpha_{n+2}$. Επομένως από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής έχουμε ότι : $\alpha_{n+1} < \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$,και άρα η ακολουθία είναι γνήσια φθίνουσα.
Δείχνουμε επαγωγικά ότι $\alpha_n > -12$.Είναι : $\alpha_1 = -1 > -12$. Υποθέτουμε,λοιπόν,ότι : $\alpha_n > -12, \forall n \in \mathbb{N}$.Αρκεί να δείξουμε ότι : $\alpha_{n+1} > -12$. Είναι : $\alpha_n > -12 \implies -3\alpha_n < 36 \implies \sqrt{-3\alpha_n} < 6 \implies -2\sqrt{-3\alpha_n} > -12 \implies \alpha_{n+1} > -12$. Η (α_n),όπως είδαμε,είναι γνήσια φθίνουσα,άρα ο πρώτος της όρος είναι άνω φραγμα,δηλαδή : $\alpha_n \leq \alpha_1 = -1, \forall n \in \mathbb{N}$. Συνολικά ισχύει ότι : $-12 < \alpha_n < -1$,δηλαδή η ακολουθία α_n είναι φραγμένη.Άρα ως μονότονη και φραγμένη συγκλίνει. Ας είναι $lim\ \alpha_n = \ell$.Μας μένει να προσδιορίσουμε το όριό της. Απο τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αν μία ακολουθία συγκλίνει,τότε και κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο,έτσι παίρνοντας τα όρια στον αναγωγικό τύπο έχουμε ότι : $\ell = -2\sqrt{-3\ell} \implies \ell^2 = -12\ell \implies \ell = 0$ ή $\ell = 12$. Είδαμε όμως ότι : $\alpha_n \leq -1 \implies lim\ \alpha_n < 0$. Άρα $\ell = -12$. Σημειώνουμε πως το γεγονός ότι η μία λύση απορρίφθηκε δεν ήτανε τυχαίο,αφού το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

Θέμα 6(i) Έστω $\epsilon > 0$. Η f_1 είναι συνεχής στο x_0,άρα:
$(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathbb{Q}) : |x - x_0| < \delta_1 \implies |f_1(x) - f_1(x_0)| < \epsilon$.
Όμοια η f_2 είναι συνεχής στο x_0,άρα :
$(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) : |x - x_0| < \delta_2 \implies |f_2(x) - f_2(x_0)| < \epsilon$.
Επιλέγουμε $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ και αφού από τα δεδομένα : $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ είναι : $(\forall x \in \mathbb{R}) : |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$. Δηλαδή η g είναι συνεχής στο x_0.
(ii) Έστω $(\alpha_n) \subset \mathbb{Q}$ και $(b_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με : $\alpha_n \to x_0$ και $b_n \to x_0$.
Είναι : $g(\alpha_n) = f_1(\alpha_n)$. Η f_1 δίνεται συνεχής,άρα $g(\alpha_n) = f_1(\alpha_n) \to f_1(x_0)$.
Τώρα,η $(b_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $b_n \to x_0$ και f_2 συνεχής,άρα :
$g(b_n) = f_2(b_n) \to f_2(x_0)$,αλλά από υπόθεση είναι : $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$,άρα όντως η g δεν είναι συνεχής στο x_0.

Θέμα 7 Είναι $A = (0, +\infty)$. Και :
$f'(x) = \frac{x - 2x\log x}{x^4} = \frac{1 - 2\log x}{x^3}$,
$f''(x) = \frac{-2x^2 - (1 - 2\log x)3x^2}{x^6} = \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2\log x}{x^6} = \frac{x^2(-5 + 6\log x)}{x^6} = \frac{6\log x - 5}{x^4}$
Παρατηρούμε ότι :$f'(x) = 0 \iff 1 - 2\log x = 0 \iff \log x = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{e}$
$f'(x) < 0 \iff 1 < 2\log x \iff \log x > \frac{1}{2} \iff x > \sqrt{e}$
$f'(x) > 0 \iff 0 < x < \sqrt{e}$
$f''(x) = 0 \iff \log x = \frac{5}{6} \iff x = e^{\frac{5}{6}}$
$f''(x) > 0 \iff 6\log x - 5 > 0 \iff x > e^{\frac{5}{6}}$
$f''(x) < 0 \iff 0 < x < e^{\frac{5}{6}}$
Είναι : $f(\sqrt{e}) = \frac{\log\sqrt{e}}{e} = \frac{1}{2e}$ και : $f(e^{\frac{5}{6}}) = \frac{\frac{5}{6}}{e^{\frac{5}{3}}}$. Καί είναι :
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\log x)(\frac{1}{x^2}) = -\infty$,διότι :$\lim_{x\to 0^+}\log x = -\infty$ και $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty$.Άρα $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.Επίσης :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$,άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.Συνεπως συνολικά έχουμε ότι η f στο $(-\infty, e^{\frac{1}{2}}]$ είναι αύξουσα και κοίλη στο $(e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{5}{6}})$ η f είναι φθίνουσα και κοίλη και τέλος στο $[e^{\frac{5}{6}}, +\infty)$ η f είναι φθίνουσα και κυρτή.Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $e^{\frac{1}{2}}$ με τιμή $f(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2e}$ και σημείο καμπής στο $e^{5/6}$.

Θέμα 8Από ΘΜΤ του *Lagrange* στο $[\alpha, \beta]$ για την f υπάρχει αριθμός ξ_1 στο (α, β) : $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi_1)(\beta - \alpha)$ καί με ΘΜΤ άλλη μία φορά στο ανοιχτό διάστημα (β, γ) υπάρχει αριθμός ξ_2 ώστε : $f(\gamma) - f(\beta) = f'(\xi_2)(\gamma - \beta) \implies f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$,οπότε από το Θεώρημα του *Rolle* στο $[\xi_1, \xi_2]$ για την παραγωγίσιμη f' υπάρχει ξ στο αντίστοιχο ανοιχτό,ώστε : $f''(\xi) = 0$.